# Mathematisch/Logische Schreibweisen

Hans Jürgen Ohlbach

Die natürliche Sprache ist in den allermeisten Situationen das optimale Medium für die Kommunikation zwischen Menschen. Zur Übermittlung formaler, insbesondere mathematischer, Sachverhalte ist eine natürliche Sprache allerdings weniger geeignet. Sie ist für diesen Zweck meistens ziemlich langatmig und unübersichtlich und oft sogar zu unpräzise. Daher hat sich in der Mathematik und auch in der Informatik für die Beschreibung formaler Zusammenhänge die Sprache der Logik, speziell der Prädikatenlogik, etabliert. Sie wird in vielen Dokumenten benutzt und wird deshalb hier kurz eingeführt. Eine informelle Beschreibung ohne formale Spezifikation von Syntax und Semantik soll allerdings genügen. Weitergehende Kenntnisse der Prädikatenlogik sind dazu nicht nötig.

Die Prädikatenlogik stellt Symbole zur Verfügung, mit denen Formeln gebildet werden können. Eine Formel steht dabei für eine Aussage, die wahr oder falsch sein kann. Wir verwenden die Zeichen $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \ldots$ als Platzhalter für beliebige Formeln.

Bei den Symbolen unterscheidet man zwischen den *logischen Symbolen*, die für alle Anwendungen der Prädikatenlogik gleich sind, und den *anwendungsspezifischen Symbolen*.

## 1 Logische Symbole

Abgesehen von einigen Hilfssymbolen wie Komma und Klammern gibt es zwei Arten von logischen Symbolen: *Junktoren* und *Quantoren*.

### 1.1 Junktoren

Junktoren verknüpfen Formeln, die wahr oder falsch sein können:

**$\neg$ (Nicht-Verknüpfung)**

Für eine Formel $\mathcal{F}$ ist die Formel $\neg\mathcal{F}$ genau dann wahr, wenn $\mathcal{F}$ falsch ist.

**Beispiel:** $\neg(1 > 2)$ ist wahr, weil $(1 > 2)$ falsch ist.
$\neg(1 < 2)$ ist falsch, weil $(1 < 2)$ wahr ist.

[0]Dies ist ein Auszug aus Ohlbach, Eisinger: Design Patterns für Mathematische Beweise - Ein Leitfaden insbesondere für Informatiker (erscheint im Springer Verlag).

$\wedge$ **(Und-Verknüpfung)**

Für zwei Formeln $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ ist die Formel $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}$ genau dann wahr, wenn sowohl $\mathcal{F}$ als auch $\mathcal{G}$ wahr ist.

**Beispiel:** *es regnet* $\wedge$ *es stürmt* ist wahr, falls es regnet und auch stürmt.

In technischen Gebieten wird anstelle von $\wedge$ auch der Punkt . geschrieben, in der Mathematik manchmal auch das Komma.

$\vee$ **( Oder-Verknüpfung)**

Für zwei Formeln $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ ist die Formel $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$ genau dann wahr, wenn mindestens eine der Formeln $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ wahr ist.

**Beispiel:** *es regnet* $\vee$ *es stürmt* ist wahr, falls es regnet oder stürmt oder beides.

In technischen Gebieten wird anstelle von $\vee$ auch das Pluszeichen $+$ geschrieben.

$\Rightarrow$ **(Implikationsjunktor, Wenn-Dann-Verknüpfung)**

Für zwei Formeln $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ ist die Formel $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ genau dann wahr, wenn gilt: Falls $\mathcal{F}$ wahr ist, ist auch $\mathcal{G}$ wahr.
Das heißt, entweder sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ beide wahr oder $\mathcal{F}$ ist falsch (in diesem Fall spielt es keine Rolle, ob $\mathcal{G}$ wahr oder falsch ist).

**Beispiel:** *es regnet* $\Rightarrow$ *man wird nass*.

Es gilt der Zusammenhang: $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ ist äquivalent zu $\neg\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$.
Das Beispiel ist äquivalent zu: $\neg$*(es regnet)* $\vee$ *man wird nass*.

$\Leftrightarrow$ **(Äquivalenzjunktor, Genau-Dann-Wenn-Verknüpfung)**

Für zwei Formeln $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ ist die Formel $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G}$ genau dann wahr, wenn $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ entweder beide wahr oder beide falsch sind.

**Beispiel:** $x + 1 = 2 \;\Leftrightarrow\; x = 1$.

Zusammenhänge: $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G}$ ist äquivalent zu $(\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}) \vee (\neg\mathcal{F} \wedge \neg\mathcal{G})$
sowie zu $(\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}) \wedge (\mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F})$ und auch zu $(\neg\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \wedge (\mathcal{F} \vee \neg\mathcal{G})$.

## 1.2 Quantoren

Quantoren führen Variablen für Objekte ein, über die Aussagen gemacht werden sollen. Siehe dazu auch Abschnitt 3.

$\exists$ **(Existenzquantor)**

Eine existenzquantifizierte Formel $\exists x\, \mathcal{F}(x)$ ist genau dann wahr, wenn es ein Objekt $x$ gibt, für das die Formel $\mathcal{F}(x)$ wahr ist.

**Beispiel:** $\exists x$ *Albert Einstein ist Vater von* $x$ ist wahr, weil Albert Einstein Kinder hatte.

formal: $\exists x \underbrace{\mathit{Albert\_Einstein\_ist\_Vater\_von}}_{\mathcal{F}}(x)$

$\forall$ **(Allquantor)**

Eine allquantifizierte Formel $\forall x\, \mathcal{F}(x)$ ist genau dann wahr, wenn für jedes Objekt $x$ die Formel $\mathcal{F}(x)$ wahr ist.

**Beispiel:** $\forall x$ *(Albert Einstein ist Vater von* $x \;\Rightarrow\; x$ *ist schlau)*
ist wahr, falls tatsächlich alle Kinder von Albert Einstein schlau sind.[1]

Die Variablen bei den Quantoren können beliebig gewählt bzw. (konsistent) umbenannt werden. Die Formeln $\exists x\, \mathcal{F}(x)$ und $\exists y\, \mathcal{F}(y)$ sind äquivalent. Man sollte allerdings aufpassen, wenn mehrere Quantoren die gleiche Variable verwenden. Eine Formel $\forall x \exists x\, \mathcal{F}(x)$ ist nicht besonders sinnvoll, weil darin $\forall x$ von $\exists x$ überschattet wird und damit nutzlos ist.

### 1.2.1 Kurzschreibweisen für beschränkte Quantifizierung

Quantoren kommen häufig in typischen Kombinationen mit Junktoren vor:

- $\forall x\, (\mathcal{F}(x) \Rightarrow \mathcal{G}(x))$, also Allquantor mit Implikationsjunktor
- $\exists x\, (\mathcal{F}(x) \wedge \mathcal{G}(x))$, also Existenzquantor mit Konjunktionsjunktor

Man nennt diese Kombinationen auch *beschränkte Quantifizierung*.

Für die beschränkte Quantifizierung ist in Fällen, in denen die Teilformel $\mathcal{F}(x)$ hinreichend einfach ist, eine Kurzschreibweise üblich. Man kombiniert dann die Teilformel $\mathcal{F}(x)$ direkt mit dem Quantor und lässt den Junktor weg.

**Beispiele:**

- Quantifizierung über gegebene Mengen
  $\forall x(x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists y(y \in \mathbb{N} \wedge x < y))$ Kurzschreibweise: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \ x < y$
  oder noch kürzer: $\forall x : \mathbb{R}\ \exists y : \mathbb{N}\ \ x < y$
  ($\mathbb{R}$ steht für die Menge der reellen Zahlen, $\mathbb{N}$ für die Menge der natürlichen Zahlen $\geq\ 0$.)
- Einfache Vergleichsbeziehungen
  $\forall x(x > 0 \Rightarrow \exists y(y \neq 0 \wedge x{\cdot}y = 1))$ Kurzschreibweise: $\forall x > 0\ \exists y \neq 0\ \ x{\cdot}y = 1$

Eine Besonderheit dieser Kurzschreibweise ist manchmal etwas verwirrend.

Die Formel $\forall x$ : *Einhörner blond*$(x)$ soll besagen, dass alle Einhörner blond sind. Nun, es gibt keine Einhörner. Ist die Aussage dann wahr oder falsch?

Wenn man die Formel wieder ausschreibt, erhält man $\forall x$ *Einhörner*$(x) \Rightarrow$ *blond*$(x)$. Da für alle $x$ die Prämisse *Einhörner*$(x)$ der Implikation falsch ist, ist die Implikation immer wahr. Daher ist auch die allquantifizierte Aussage wahr. Das kann man auf den Punkt bringen:

**Ein allquantifizierte Aussage über eine leere Menge ist immer wahr.**

Die Aussage einer Person X, wie z.B. „Meine Kinder sind alle Genies“ wäre insbesondere dann wahr wenn X gar keine Kinder hat.

[1] Leider ist Einsteins 1902 geborene erste Tochter Lieserl verschollen, so dass man den Wahrheitswert dieser Formel nicht mehr entscheiden kann.

## 2 Anwendungsspezifische Symbole

Junktoren und Quantoren werden in allen Anwendungen der Logik mit derselben Bedeutung verwendet und sind deshalb fest vorgegeben. Die restlichen Symbole sind dagegen nicht von der Logik vorgegeben, sondern werden abhängig von der jeweiligen Anwendung gewählt.

Wenn es um Zahlentheorie geht, könnte zum Beispiel das Symbol $Prim$ mit der Bedeutung „ist eine Primzahl" verwendet werden: $Prim(3) \wedge \neg Prim(4)$. Natürlich kann man auch ein anderes Symbol für diese Bedeutung wählen, zum Beispiel $P$ oder $istPrimzahl$.

In anderen Kontexten könnte das Symbol $Prim$ mit anderer Bedeutung vorkommen. In einer Anwendung aus der Theologie stünde es vielleicht für das katholische Morgengebet, in der Musiklehre für ein Tonintervall, im Sport für einen bestimmten Fechthieb. Wieder andere Anwendungen würden es gar nicht verwenden.

Die anwendungsspezifischen Symbole sind zwar nicht vorgegeben, aber sie werden nach einer vorgegebenen Klassifikation eingeteilt in *Konstanten*, *Funktionssymbole* und *Prädikatssymbole*.

**Konstanten** Eine *Konstante* ist ein Name für ein Objekt, über das Aussagen gemacht werden.

In der Arithmetik sind unter anderem die Symbole für Zahlen typische Konstanten: $42$ oder $-2,7182$ oder auch $\pi$. Dabei ist zum Beispiel $42$ nicht die Zahl selbst, sondern nur einer von mehreren symbolischen Namen dieser Zahl. Andere Namen, also Konstanten, für dieselbe Zahl sind `2A` (hexadezimal), `XLII` (römisch) und $zweiundvierzig$.

In Anwendungen aus dem Alltag könnten zum Beispiel Monatsnamen wie $Januar$ oder Personennamen wie $AlbertEinstein$ oder $QueenVictoria$ als Konstanten vorkommen.

**Funktionssymbole** Ein *Funktionssymbol* ist ein Name für eine Funktion, die ihre Argumente auf ein Objekt abbildet, über das Aussagen gemacht werden. Abhängig von der Anzahl der Argumente unterscheidet man *ein-* und *mehrstellige* Funktionssymbole. Konstanten werden manchmal auch als *nullstellige* Funktionssymbole betrachtet.

In der Mathematik sind zum Beispiel $\sin$ und $\cos$ einstellige (unäre) Funktionssymbole, die als Bezeichner für die Sinusfunktion bzw. Kosinusfunktion üblich sind, das Pluszeichen $+$ ist ein zweistelliges (binäres) Funktionssymbol, das die Additionsfunktion bezeichnet, die zweistelligen Funktionssymbole $\cdot$ und $\times$ und $*$ sind verschiedene Namen für die Multiplikationsfunktion.

Für Alltagsanwendungen könnte $VaterVon$ ein einstelliges Funktionssymbol sein, das für eine Funktion steht, die eine Person auf ihren Vater abbildet: $VaterVon(AlbertEinstein)$ hat dann Hermann Einstein als Wert, Albert Einsteins Vater.

Funktionssymbole können geschachtelt werden: $\sin(\pi + \pi)$ ist zulässig, sein Wert ist die Zahl $0$, der Wert von $\cos(\sin(\pi + \pi))$ ist die Zahl $1$, der Wert von $VaterVon(VaterVon(AlbertEinstein))$ ist Albert Einsteins Großvater Abraham Rupert Einstein.

**Prädikatssymbole** Ein *Prädikatssymbol* ist ein Name für ein Prädikat,[2] das seine Argumente auf einen Wahrheitswert abbildet. Prädikatssymbole können ebenfalls ein- oder mehrstellig sein. Ein einstelliges Prädikatssymbol bezeichnet eine Eigenschaft eines Objekts, ein mehrstelliges eine Beziehung zwischen Objekten.

In der Mathematik formalisiert man Eigenschaften meistens als Mengen, deshalb sind einstellige Prädikatssymbole ziemlich unüblich. Man bevorzugt die Schreibweise $\pi \in \mathbb{R}$ statt $istReell(\pi)$. Trotzdem spricht nichts dagegen, Symbole wie $istPrimzahl$ oder $istUngerade$ einzuführen, wenn man sie gebrauchen kann. Dagegen gibt es etliche allgemein verbreitete zweistellige Prädikatssymbole, zum Beispiel $<$ und $\geq$ usw. für die Vergleichsbeziehungen.

In Texten mit Personen und Familienbeziehungen könnte $istWeiblich$ als einstelliges und $sindGeschwister$ als zweistelliges Prädikatssymbol verwendet werden. Dann ist zum Beispiel $istWeiblich(AlbertEinstein)$ falsch und $sindGeschwister(AlbertEinstein, MariaEinstein)$ wahr, sofern die Konstante $MariaEinstein$ für Albert Einsteins Schwester steht.

Prädikatensymbole sind Namen, Zeichenketten, die aber eine Bedeutung haben. Die *Bedeutung* (Semantik) eines n-stelligen Prädikatensymbols ist eine n-stellige Relation. Z.B. wäre die Bedeutung eines Prädikatensymbols wie $sindGeschwister$ die echte Geschwister-Relation zwischen zwei Menschen.

**Beobachtung:** In vielen Texten wird aber nicht zwischen Symbolen (Syntax) und deren Bedeutung (Semantik) unterschieden. Gerade in mathematischen Texten ist das eher unüblich, und meist auch unnötig, vielleicht sogar eher noch verwirrend. Wenn dort z.B. steht $2 < 3$, dann sind nicht die Zeichenketten gemeint, sondern die Zahlen und die Kleiner-Relation zwischen den Zahlen.

In der Informatik muss man jedoch unterscheiden zwischen dem, was Computer verarbeiten können, und das sind nur Zeichenketten, und dem was sie bedeuten. Daher ist die Unterscheidung zwischen Syntax und Semantik hier wichtiger.

**Achtung:** Prädikatssymbole können nicht geschachtelt werden! Es wäre weder zulässig noch sinnvoll, so etwas wie $istWeiblich(istWeiblich(AlbertEinstein))$ zu schreiben.[3]

# 3 Formeln und Terme

Aus den verschiedenen Symbolen der Prädikatenlogik kann man zwei Arten von Ausdrücken bilden, Formeln und Terme. Eine *Formel* repräsentiert eine Aussage, die wahr oder falsch sein kann; der Wert[4] einer Formel ist also ein Wahrheitswert. Ein *Term* repräsentiert ein Objekt, über das Aussagen gemacht werden, das aber nicht selbst wahr oder falsch ist; der Wert eines Terms ist also kein Wahrheitswert, sondern zum Beispiel eine Zahl oder eine Person oder ein anderes Objekt.

[2] Im Zusammenhang mit Programmiersprachen werden Prädikate oft *Boolesche Funktionen* genannt.

[3] Jedenfalls nicht in der Prädikatenlogik erster Stufe. Es gibt andere Formalismen, etwa RDF, in denen zum Beispiel $behauptet(Cher, istWeiblich(ChazBono))$ zulässig wäre. Chaz Bono wurde als Tochter Chastity der Sängerin Cher geboren und später durch eine Geschlechtsumwandlung zum Mann Chaz.

[4] Wenn man den Unterschied zwischen Syntax und Semantik exakt formalisiert, dann spricht man zunächst von Termen und Formeln als syntaktische Objekte (Zeichenketten), und dann von einer *Interpretation*, die diese syntaktischen Objekte auf mathematische Objekte abbilden. Mit dem Begriff „Wert“ ist daher der Wert dieser Abbildung gemeint.

**Beispiel:** $\forall x \;\; x+1 > x$ ist eine Formel (die in der Arithmetik wahr ist). Auch $x+1 > x$ ist eine Formel, die in der Arithmetik, egal für welche Zahl das $x$ steht, immer wahr ist. Dagegen sind $x+1$ und $x$ sowie $1$ Terme, denn ihr Wert ist jeweils eine Zahl, aber kein Wahrheitswert.

Ein Term kann aus Variablen, Konstanten und Funktionssymbolen aufgebaut sein, aber nicht aus Prädikatssymbolen, Junktoren oder Quantoren. Deshalb ist z.B. $x+1 \lor x$ kein Term.

Die einfachste Art von Formeln besteht aus einem Prädikatssymbol mit passend vielen Termen als Argumente. Diese Formeln nennt man auch *atomare Formeln*. Zum Beispiel ist $x+1 > x$ eine atomare Formel mit dem Prädikatssymbol $>$ und den Termen $x+1$ und $x$ als Argumente. Aus atomaren Formeln kann man mit Hilfe von Junktoren und Quantoren *zusammengesetzte Formeln* aufbauen. Zum Beispiel ist $\forall x \; x+1 > x$ eine zusammengesetzte Formel wegen des Allquantors. Dagegen ist $x+1 \lor x$ keine Formel (und damit weder Term noch Formel, sondern gar nicht erst syntaktisch zulässig).

**Überblick über diese Bezeichnungen:**

$$\underbrace{\forall x \left( \underbrace{\underbrace{\overbrace{\overbrace{x}^{\text{Term}} + \overbrace{1}^{\text{Term}}}^{\text{Term}} < \overbrace{x}^{\text{Term}}}_{\text{atomare Formel}} \lor \underbrace{\overbrace{\overbrace{x}^{\text{Term}} + \overbrace{1}^{\text{Term}}}^{\text{Term}} > \overbrace{x}^{\text{Term}}}_{\text{atomare Formel}}}_{\text{zusammengesetzte Formel}} \right)}_{\text{zusammengesetzte Formel}}$$

**Achtung:** Ein Funktions- oder Prädikatssymbol ohne Argument ist kein Term.
Deshalb sind $\mathit{istKommutativ}(+)$ oder $\mathit{istTransitiv}(<)$ keine Formeln der Prädikatenlogik erster Stufe.[5]

# 4 Präfix, Infix, Postfix

Die Originalschreibweise der Prädikatenlogik ist die Präfix-Notation. Das heißt, zuerst kommt das Funktions- oder Prädikatssymbol und danach die Argumente, formal in Klammern, manchmal aber auch ohne Klammern. Beispiele sind die Terme $\max(3,4)$ und $+(3,4)$ sowie die Formel $<(3,4)$.

Gerade in der Arithmetik ist aber insbesondere für zweistellige Operationen die sogenannte Infix-Notation lesbarer. Man schreibt dann $3+4$ und $3<4$ anstelle von $+(3,4)$ und $<(3,4)$. Gelegentlich wird das Funktionssymbol in der Infix-Notation sogar gar nicht geschrieben, insbesondere bei multiplikationsartigen Operationen: $2x$ statt $2 \cdot x$ (Juxtaposition).

Für einige wenige Funktionen hat sich auch die Postfix-Notation eingebürgert, bei der das Funktionssymbol am Schluss kommt. Standardbeispiel ist die Fakultätsfunktion mit ! als üblichem Funktionssymbol: Der Term $!(5)$ wird $5!$ geschrieben und hat unabhängig von der Schreibweise den Wert $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

[5] Sie wären aber zulässig in Prädikatenlogiken höherer Stufen. Im Gegensatz zur ersten Stufe erlauben diese auch Funktions- und Prädikatsvariablen und damit Formeln wie $\forall R \; (\mathit{istReflexiv}(R) \Leftrightarrow \forall x \, R(x,x))$.

Es gibt auch Fälle wie $|x|$ oder $\lceil x \rceil$ und $\lfloor x \rfloor$, in denen das Funktionssymbol eigentlich aus zwei Teilsymbolen besteht, die vor und hinter dem Argument stehen. Das wird manchmal als „Outfix-Notation“ bezeichnet.

Die meisten Texte verwenden einfach die jeweils lesbarste Variante.

# 5 Rechenregeln

Ganz unabhängig von den jeweiligen Anwendungsgebieten gibt es Rechenregeln, die für alle prädikatenlogischen Formeln gelten. Eine wichtige Klasse solcher Regeln betrifft den Umgang mit negierten Formeln.

**Doppelte Negation:** Für eine Formel $\mathcal{F}$ gilt: $\neg\neg\mathcal{F}$ ist äquivalent zu $\mathcal{F}$.

**Negiertes $\wedge$:** Für zwei Formeln $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ gilt: $\neg(\mathcal{F} \wedge \mathcal{G})$ ist äquivalent zu $\neg\mathcal{F} \vee \neg\mathcal{G}$.

> **Beispiel:** $\neg($*es regnet* $\wedge$ *es stürmt*$)$ ist äquivalent zu $\neg$*(es regnet)* $\vee$ $\neg$*(es stürmt)*.

**Negiertes $\vee$:** Für zwei Formeln $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ gilt: $\neg(\mathcal{F} \vee \mathcal{G})$ ist äquivalent zu $\neg\mathcal{F} \wedge \neg\mathcal{G}$.

> **Beispiel:** $\neg($*es regnet* $\vee$ *es stürmt*$)$ ist äquivalent zu $\neg$*(es regnet)* $\wedge$ $\neg$*(es stürmt)*.

**Negiertes $\exists$:** Für eine Formel $\mathcal{F}$ gilt: $\neg\exists x\, \mathcal{F}(x)$ ist äquivalent zu $\forall x\, \neg\mathcal{F}(x)$

| | |
|---|---|
| **Beispiel:** | Es gibt kein Kind von Albert Einstein, das rothaarig ist. |
| | $\neg\exists x[\mathit{sindVaterUndKind}(\mathit{AlbertEinstein}, x) \wedge \mathit{istRothaarig}(x)]$ |
| ist äquivalent zu | $\forall x\, \neg[\mathit{sindVaterUndKind}(\mathit{AlbertEinstein}, x) \wedge \mathit{istRothaarig}(x)]$ |
| ist äquivalent zu | $\forall x[\neg\mathit{sindVaterUndKind}(\mathit{AlbertEinstein}, x) \vee \neg\mathit{istRothaarig}(x)]$ |
| ist äquivalent zu | $\forall x[\mathit{sindVaterUndKind}(\mathit{AlbertEinstein}, x) \Rightarrow \neg\mathit{istRothaarig}(x)]$ |
| | Alle Kinder von Albert Einstein sind nicht-rothaarig. |

**Negiertes $\forall$:** Für eine Formel $\mathcal{F}$ gilt: $\neg\forall x\, \mathcal{F}(x)$ ist äquivalent zu $\exists x\, \neg\mathcal{F}(x)$

| | |
|---|---|
| **Beispiel:** | Nicht alle Kinder von Albert Einstein sind rothaarig. |
| | $\neg\forall x[\mathit{sindVaterUndKind}(\mathit{AlbertEinstein}, x) \Rightarrow \mathit{istRothaarig}(x)]$ |
| ist äquivalent zu | $\exists x\, \neg[\mathit{sindVaterUndKind}(\mathit{AlbertEinstein}, x) \Rightarrow \mathit{istRothaarig}(x)]$ |
| ist äquivalent zu | $\exists x\, \neg[\neg\mathit{sindVaterUndKind}(\mathit{AlbertEinstein}, x) \vee \mathit{istRothaarig}(x)]$ |
| ist äquivalent zu | $\exists x[\neg\neg\mathit{sindVaterUndKind}(\mathit{AlbertEinstein}, x) \wedge \neg\mathit{istRothaarig}(x)]$ |
| ist äquivalent zu | $\exists x[\mathit{sindVaterUndKind}(\mathit{AlbertEinstein}, x) \wedge \neg\mathit{istRothaarig}(x)]$ |
| | Es gibt ein Kind von Albert Einstein, das nicht rothaarig ist. |

Die Quantor-Beispiele sind so gewählt, dass sie auch die Wirkung der Negation bei beschränkter Quantifizierung illustrieren. Sei $K_{AE}$ die Menge der Kinder von Albert Einstein. Dann kann man die Quantor-Beispiele so formulieren:

- $\neg\exists x \in K_{AE}\ \mathit{istRothaarig}(x)$ ist äquivalent zu $\forall x \in K_{AE}\ \neg\mathit{istRothaarig}(x)$
- $\neg\forall x \in K_{AE}\ \mathit{istRothaarig}(x)$ ist äquivalent zu $\exists x \in K_{AE}\ \neg\mathit{istRothaarig}(x)$

Das heißt, die Negation wirkt sich nicht auf die erste Teilformel aus, die direkt mit dem Quantor kombiniert wird.

Weitere häufig benötigte Rechenregeln sind

**Assoziativgesetze für $\wedge$ und $\vee$:**

| | | |
|---|---|---|
| $\mathcal{F} \wedge (\mathcal{G} \wedge \mathcal{H})$ | ist äquivalent zu | $(\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}) \wedge \mathcal{H}$ |
| $\mathcal{F} \vee (\mathcal{G} \vee \mathcal{H})$ | ist äquivalent zu | $(\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \vee \mathcal{H}$ |

Immer wenn das Assoziativgesetz gilt, kann man die Klammern ganz weglassen.

| | | |
|---|---|---|
| $\mathcal{F} \vee (\mathcal{G} \vee \mathcal{H})$ | ist äquivalent zu | $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \vee \mathcal{H}$ |

**Kommutativgesetze für $\wedge$ und $\vee$:**

| | | |
|---|---|---|
| $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}$ | ist äquivalent zu | $\mathcal{G} \wedge \mathcal{F}$ |
| $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$ | ist äquivalent zu | $\mathcal{G} \vee \mathcal{F}$ |

**Distributivgesetze für $\wedge$ und $\vee$:**

| | | |
|---|---|---|
| $\mathcal{F} \wedge (\mathcal{G} \vee \mathcal{H})$ | ist äquivalent zu | $(\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}) \vee (\mathcal{F} \wedge \mathcal{H})$ |
| $\mathcal{F} \vee (\mathcal{G} \wedge \mathcal{H})$ | ist äquivalent zu | $(\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \wedge (\mathcal{F} \vee \mathcal{H})$ |

Rechenregeln für Kombinationen mit Quantoren bilden eine andere größere Klasse.

**Quantor-Quantor-Regeln:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\exists x \exists y\, \mathcal{F}(x, y)$ | ist äquivalent zu | $\exists y \exists x\, \mathcal{F}(x, y)$ | abgekürzt: $\exists x, y\, \mathcal{F}(x, y)$ |
| $\forall x \forall y\, \mathcal{F}(x, y)$ | ist äquivalent zu | $\forall y \forall x\, \mathcal{F}(x, y)$ | abgekürzt: $\forall x, y\, \mathcal{F}(x, y)$ |

Unterschiedliche Quantoren dürfen dagegen im Allgemeinen nicht vertauscht werden:

| | | |
|---|---|---|
| $\forall y \exists x\, \mathit{sindMutterUndKind}(x, y)$<br>jeder hat eine Mutter | **nicht** äquivalent | $\exists x \forall y\, \mathit{sindMutterUndKind}(x, y)$<br>jemand ist Mutter von allen |

**Quantor-Junktor-Regeln:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $[\exists x\, \mathcal{F}(x)] \wedge \mathcal{G}$ | ist äquivalent zu | $\exists x[\mathcal{F}(x) \wedge \mathcal{G}]$ | falls $x$ nicht in $\mathcal{G}$ vorkommt |
| $[\exists x\, \mathcal{F}(x)] \vee \mathcal{G}$ | ist äquivalent zu | $\exists x[\mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G}]$ | falls $x$ nicht in $\mathcal{G}$ vorkommt |
| $[\forall x\, \mathcal{F}(x)] \wedge \mathcal{G}$ | ist äquivalent zu | $\forall x[\mathcal{F}(x) \wedge \mathcal{G}]$ | falls $x$ nicht in $\mathcal{G}$ vorkommt |
| $[\forall x\, \mathcal{F}(x)] \vee \mathcal{G}$ | ist äquivalent zu | $\forall x[\mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G}]$ | falls $x$ nicht in $\mathcal{G}$ vorkommt |
| $[\exists x\, \mathcal{F}(x)] \vee [\exists x\, \mathcal{G}(x)]$ | ist äquivalent zu | $\exists x[\mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G}(x)]$ | |
| $[\forall x\, \mathcal{F}(x)] \wedge [\forall x\, \mathcal{G}(x)]$ | ist äquivalent zu | $\forall x[\mathcal{F}(x) \wedge \mathcal{G}(x)]$ | |

Für $\exists$ mit $\wedge$ und $\forall$ mit $\vee$ gelten dagegen keine Rechenregeln wie die vorigen beiden:

| | | |
|---|---|---|
| $[\exists x\, \mathit{Mann}(x)] \wedge [\exists x\, \mathit{Frau}(x)]$<br>es gibt Männlein und Weiblein | **nicht** äquivalent | $\exists x[\mathit{Mann}(x) \wedge \mathit{Frau}(x)]$<br>jemand ist beides |
| $[\forall x\, \mathit{Mann}(x)] \vee [\forall x\, \mathit{Frau}(x)]$<br>alle sind Männlein oder<br>alle sind Weiblein | **nicht** äquivalent | $\forall x[\mathit{Mann}(x) \vee \mathit{Frau}(x)]$<br>jeder ist eines davon |